Wilson 元特征值下逼近准确特征值[*1)]

张智民
(湖南师范大学, 长沙 410081)

杨一都 陈 震
(贵州师范大学, 贵阳 550001)

摘 要

该文讨论矩形域上 Laplace 算子特征值问题有限元近似. 证明了 Wilson 非协调有限元特征值下逼近准确特征值, 从而解决了有限元法中长期存在的一个猜想.

关键字: 特征值, Wilson 元

MR (2000) 主题分类: 65N30, 65N50, 65N25

EIGENVALUE APPROXIMATION FROM BELOW BY WILSON'S ELEMENT

Zhang Zhimin
(*Hunan Normal University, Changsha 410081, China*)

Yang Yidu Chen Zhen
(*Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China*)

Abstract

We consider the finite element approximation for the eigenvalue problem of the Laplace operator on a rectangular domain. We prove that the nonconforming Wilson element approximates eigenvalues from below, and thereby settle a long standing conjecture in the finite element method.

Keywords: Eigenvalue, Wilson element

2000 Mathematics Subject Classification: 65N30, 65N50, 65N25

1. 引 言

Wilson 元是矩形或四边形网格上的一种二次非协调元. 它有悠久的历史, 在科学计算领域受到广泛重视. Strang-Fix[11] 和 Ciarlet[5] 讨论了 Wilson 元. 1980 年 Lesaint 和 Zlámal[6] 对二阶椭圆方程采用修改的变分形式证明了四边形网格上 Wilson 元的收敛性, 1984 年石钟慈 [9] 采用标准变分形式也证明了四边形网格上 Wilson 元的收敛性. 1994 年陈宏森和李波 [4] 研究了 Wilson 元的超收敛性, 1997 年石钟慈等 [10] 进一步研究了 Wilson 元的超收敛性. 1994 年张智民等 [14] 研究了 Reissner-Mindlin 板 Wilson 元的非闭锁现象, 1997 年张智民 [13] 研究了不可压缩弹性方程 Wilson 元. 林群和严宁宁 [8], 杨一都 [12] 也讨论了 Wilson 元.

[*] 2006 年 6 月 12 日收到.

[1)] 国家自然科学基金 (No. 10571053) 和贵州省优秀科技教育人才省长专项资金 (黔科教办 [2005]155 号) 资助项目.

33 年前, Strang-Fix[11,p.180] 发现 "基于 u_*^h 的应变能不再小于 u 的应变能. 事实上, 对应变能和位移从上面收敛都不再是特例而是法则." 这里他们指出了 Wilson 元对应变能和位移均为上逼近. 在数值实验中已经发现, 与双线性元不同, 对 Laplace 算子特征值问题, Wilson 元特征值是从下面收敛. 然而对这简单的事实却一直没有得到理论解释.

最近, Armentano 和 Duran[1] 证明了当 Laplace 算子特征函数奇异和网格直径足够小时 Crouzeix-Raviart 非协调三角形给出下界. 受这结果启发, 我们将证明 Wilson 元确实给出 Laplace 算子特征值下界, 从而解决了这个有限元法中长期存在的猜想.

关于特征值逼近的一般理论, 读者可以参考文 [2, 3, 12].

2. 特征值逼近

考虑特征值问题:

求 $\lambda \in R, 0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ and $\|u\| = 1$, 使得

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v = \lambda \int_\Omega uv = \lambda(u,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.1}$$

我们用 Wilson 元解这个问题: 求 $\lambda_h \in R$, $u_h = u_h^c + u_h^n \in V_h = S_h + B_h$, $\|u_h\| = 1$, 使得

$$a_h(u_h,v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla u_h \nabla v_h = \lambda_h(u_h,v_h), \quad \forall v_h \in S_h + B_h. \tag{2.2}$$

其中 T_h 是 Ω 的剖分, S_h 是双线性元空间, B_h 是 bubble 函数空间, 是非协调部分.

引理 1. 设 $(\lambda,u) \in R \times H_0^1(\Omega)$ 是 (1) 的特征对, $(\lambda_h,u_h) \in R \times V_h$ 是 (2) 的特征对, $u_I \in V_h$ 是 u 的 Wilson 元插值. 则下列恒等式成立.

$$\lambda - \lambda_h = \|u-u_h\|_h^2 - \lambda_h\|u_I - u_h\|^2 + \lambda_h(\|u_I\|^2 - \|u\|^2) + 2a_h(u-u_I,u_h). \tag{2.3}$$

证明. 由 $\|u\| = 1 = \|u_h\|$, 我们观察到

$$a_h(u,u) = \lambda, \quad a_h(u_h,u_h) = \lambda_h.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\lambda + \lambda_h &= a_h(u-u_h,u-u_h) + 2a_h(u,u_h) \\
&= \|u-u_h\|_h^2 + 2a_h(u_I,u_h) + 2a_h(u-u_I,u_h) \\
&= \|u-u_h\|_h^2 + 2\lambda_h(u_I,u_h) + 2a_h(u-u_I,u_h) \\
&= \|u-u_h\|_h^2 - \lambda_h\|u_I-u_h\|^2 + \lambda_h\|u_h\|^2 + \lambda_h\|u_I\|^2 \\
&+ 2a_h(u-u_I,u_h) \\
&= \|u-u_h\|_h^2 - \lambda_h\|u_I-u_h\|^2 + 2\lambda_h + \lambda_h(\|u_I\|^2 - \|u\|^2) \\
&+ 2a_h(u-u_I,u_h).
\end{aligned}$$

两边减 $2\lambda_h$ 即可得到结论.

我们引用 [7, 引理 3.8] 中的下列引理.

引理 2. 设 Ω 是矩形域, T_h 是矩形剖分, $u \in H^3(\Omega)$. 则在引理 1 的条件下有

$$a_h(u-u_I,u_h) = \frac{1}{3}\sum_e (h_e^2 + k_e^2)\int_e u_{xx}u_{yy}dxdy + O(h^3). \tag{2.4}$$

现在我们来证明本文的主要定理.

定理 1. 在引理 2 同样的假设下, 当 λ 是简单特征值时, λ_h 从下面逼近 λ.

证明. 我们估计 (3) 右端 4 项中的每一项. 由 [5], 我们知道对矩形网格下的 Wilson 元成立

$$\|u-u_h\|_h^2 = O(h^2), \quad \|u_I - u_h\|^2 = O(h^4). \tag{2.5}$$

(5) 的正则性要求是 $u \in H^2(\Omega)$, 对矩形域上的特征值问题是能够满足的. 从三角形不等式我们还有

$$|\ \|u_I\|^2 - \|u\|^2\ | = |\ \|u\| - \|u_I\|\ |\ (\|u\| + \|u_I\|) \le \|u - u_I\|(\|u\| + \|u_I\|).$$

利用标准的多项式逼近理论,$\|u-u_I\| \le Ch^3 \mid u\mid_3$, 因此

$$\|u_I\|^2 - \|u\|^2 = O(h^3). \tag{2.6}$$

当 $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ 是矩形域时, 特征函数是

$$u(x,y) = \sin\frac{\pi}{L_1}x \sin\frac{\pi}{L_2}y.$$

因此, 在 Ω 上 $u_{xx}u_{yy} > 0$, 从而利用 (4) 得

$$a_h(u-u_I, u_h) > 0, \quad a_h(u-u_I, u_h) = O(h^2). \tag{2.7}$$

联系 (3) 式右端各项的估计式 (5)-(7), 我们看到, 当 h 充分小时 $\lambda - \lambda_h > 0$, 换句话说, λ_h 从下面逼近 λ.

参 考 文 献

[1] Armentano M G, Duràn R G. Asymptotic lower bounds for eigenvalues by nonconforming finit element methods[J]. Electronic Transections on Numeerical Analysis, 2004, 17: 92-101.

[2] Babuška I, Osborn J. Eigenvalue problems[M]. in: Handbook of Numerical Analysis, Vol.2, North-Holand, Elsevier Science Publishers, 1991.

[3] Chatelin F. Spectral Approximations of Linear Operators[M]. New York: Academic Press, 1983

[4] Chen H S, Li B. Superconvergence analysis and error expansion for the Wilson nonconforming finite element[J]. Numer. Math., 1994, 69: 125-140.

[5] Ciarlet P G. The finite element method for elliptic proplems[M]. Amsterdam: North-Holand, 1978.

[6] Lesaint P, Zlamal M. Convergence of the nonconforming Wilson element for arbitrary quadrilateral meshes[J]. Numer. Math., 1980, 36: 33-52.

[7] Lin Q, Lin J F. Finite element methods: accuracy and improvement[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[8] 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析 [M]. 保定: 河北大学出版社, 1996.

[9] Shi Z C. A convergence condition for the quadrilateral Wilson element[J]. Numer. Math., 1984, 44: 349-361.

[10] Shi Z C, Jiang B, Xue W M. A new superconvergence property of Wilson nonconforming finite element[J]. Numer. Math., 1997, 78: 259-268.

[11] Strang G, Fix G J. An analysis of the Finite Element Method[M]. Enlewood Cliffs, New Jersey: Printice-Hall, 1973.

[12] 杨一都. 特征值问题有限元法分析 [M]. 贵阳: 贵州人民出版社, 2004.

[13] Zhang Z. Analysis of some quadrilateral nonconforming element for incompressible elasticity[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1997, 34: 640-663.

[14] Zhang Z, Zhang S. Wilson's element for the Reissner-Mindlin plate[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1994, 113: 55-65.